Métodos de Prueba en el Cálculo de Predicados

Carolina Chang
Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y Tecnología de la Información
cchang@usb.ve

**** **Observación:** esta versión es el primer borrador de este documento. El material aún no está completo y contiene errores, pero puede resultar útil como guía de estudio para el próximo examen parcial. Debe ser utilizado con precaución. ****

20 de Enero de 2014, Versión 0.1 [1]

Esta guía se basa en la suposición de que el lector ya conoce el enfoque de Cálculo de Predicados presentado en *Gries y Schneider(1993): "A Logical Approach to Discrete Math", Springer*. El alcance de estas notas consiste en ilustrar cómo utilizar los axiomas y teoremas de la Lógica Proposicional y de la Lógica de Predicados para realizar demostraciones por distintos métodos de prueba. Para ello analizo preguntas de exámenes pasados, combinando demostraciones formales con explicaciones informales, en espera que estos ejemplos sirvan de ayuda a mis estudiantes de *CI2511: Lógica Simbólica*.

Cabe destacar que esta guía sólo ilustra algunas formas de abordar y presentar demostraciones en Cálculo de Predicados, y que de ninguna manera pretende descartar otros estilos o enfoques.

Parte I
Modelando y Demostrando argumentos sencillos

1. Examen Septiembre-Diciembre 2011

Modele el siguiente enunciado haciendo uso de la Lógica de Predicados, usando el vocabulario que se le da a continuación. **Demuestre usando el Método Abreviado Debilitamiento** que la expresión resultante del modelado es un teorema. Puede utilizar de manera implícita los teoremas de asociatividad, simetría y doble negación.

Vocabulario:

- Dominio: $Universo(\mathbb{U})$
- Predicados:
  - $M.x \approx x$ es Marciano. M: $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{B}$.
  - $V.x \approx x$ es Venusino. V: $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{B}$.
  - $D.x \approx x$ es Divertido. D: $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{B}$.

Ningún Venusino es divertido. Todos los Marcianos son divertidos. En consecuencia, ningún Marciano es Venusino.

Modelo:

$$
\begin{array}{rll}
 & \text{H0:} & \neg(\exists x \,|\, V.x : D.x) \\
 & \text{H1:} & (\forall x | M.x : D.x) \\
\hline
\therefore & \text{C:} & \neg(\exists x | M.x : V.x)
\end{array}
$$

Prueba por el Método Abreviado Debilitamiento:

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x \,|\, V.x : D.x) \wedge (\forall x | M.x : D.x) \\
\equiv & \quad \langle (9.18\text{b}) \text{ De Morgan Generalizado donde R es } V.x, \text{P es } D.x \rangle \\
 & (\forall x \,|\, V.x : \neg D.x) \wedge (\forall x | M.x : D.x) \\
\equiv & \quad \langle (9.2) \text{ Intercambio donde R es } V.x, \text{P es } \neg D.x \rangle \\
 & (\forall x \,|: \, V.x \Rightarrow \neg D.x) \wedge (\forall x | M.x : D.x) \\
\equiv & \quad \langle (9.2) \text{ Intercambio donde R es } M.x, \text{P es } D.x \rangle \\
 & (\forall x \,|: \, V.x \Rightarrow \neg D.x) \wedge (\forall x |: \, M.x \Rightarrow D.x) \\
\equiv & \quad \left\langle \begin{array}{l} (8.15) \text{ Distributividad donde R es } true, \text{P es } (V.x \Rightarrow \neg D.x), \text{Q es } (M.x \Rightarrow D.x) \\ \text{dado que las cuantificaciones en } \forall \text{ siempre están definidas} \end{array} \right\rangle \\
 & (\forall x \,|: \, (V.x \Rightarrow \neg D.x) \wedge (M.x \Rightarrow D.x)) \\
\equiv & \quad \langle \text{Contrarrecíproco con } p, q := V.x, \neg D.x; \text{Doble Neg. ; Sim.} \wedge \rangle \\
 & (\forall x \,|: \, (M.x \Rightarrow D.x) \wedge (D.x \Rightarrow \neg V.x)) \\
\Rightarrow & \quad \langle (3.82\text{a}) \text{ Transitividad con } p, q, r := M.x, D.x, V.x; \text{ Paridad 0 (par) } E : (\forall x |: z) \rangle \\
 & (\forall x \,|: \, (M.x \Rightarrow \neg V.x)) \\
\equiv & \quad \langle (9.2) \text{ Intercambio donde R es } M.x, \text{P es } \neg V.x \rangle \\
 & (\forall x \,|\, M.x : \neg V.x) \\
\equiv & \quad \langle (9.18\text{b}) \text{ De Morgan Generalizado donde R es } M.x, \text{P es } V.x \rangle \\
 & \neg(\exists x \,|\, M.x : V.x)
\end{array}
$$

2. Examen Septiembre-Diciembre 2010

Se desea que Ud. modele formalmente un argumento que se da a continuación en lenguaje natural y que, una vez hecho esto, muestre que el razonamiento es correcto haciendo uso del Cálculo de Predicados. El argumento en cuestión tiene tres premisas, que son las siguientes: Todas las iguanas odian a todos los cunaguaros; Amaranta Úrsula es una iguana; José Aureliano es un cunaguaro. La conclusión del argumento es: Amaranta Úrsula odia al menos a un animal.

Para el modelado formal del argumento, Ud. deberá utilizar (únicamente) los siguientes elementos:

un único tipo (dominio, universo) correspondiente al conjunto de todos los animales,

un predicado unario (símbolo relacional unario) Ig, tal que Ig.x significa "x es una iguana",

un predicado unario (símbolo relacional unario) Cu, tal que Cu.x significa "x es un cunaguaro",

un predicado binario (símbolo relacional binario) Od, tal que Od(x, y) significa "x odia a y",

una constante 'au' que denota a "Amaranta Úrsula",

una constante 'ja' que denota a "José Aureliano".

Responda entonces lo siguiente:

a. Modele las tres premisas y la conclusión arriba presentadas, cada una con una expresión, haciendo uso (sólo) de los elementos de modelación dados.

b. Demuestre que el razonamiento es correcto haciendo uso del Cálculo de Predicados. Esto es, demuestre que $H0 \wedge H1 \wedge H2 \Rightarrow C$ es un teorema, siendo H0 , H1 y H2 las tres expresiones propuestas por Ud. en la Parte a para las premisas y siendo C la expresión propuesta por Ud. en la parte a para la conclusión. Puede hacer uso de los métodos de prueba que Ud. desee y considere conveniente, y también puede utilizar cualquiera de los teoremas listados en el libro de texto. Si desea utilizar cualquier otro teorema que no esté entre los listados en el libro de texto, debe demostrarlo.

Modelo:

$$\begin{array}{lll} & \text{H0:} & (\forall x | Ig.x : (\forall y | Cu.y : Od(x, y))) \\ & \text{H1:} & Ig.\text{`}au\text{'} \\ & \text{H2:} & Cu.\text{`}ja\text{'} \\ \hline \therefore & \text{C:} & (\exists x | : Od(\text{`}au\text{'}, x)) \end{array}$$

Prueba por el Método Abreviado Debilitamiento:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x|Ig.x : (\forall y|Cu.y : Od(x,y))) \wedge Ig.\text{`}au\text{'} \wedge Cu.\text{`}ja\text{'} \\
\equiv & \quad \langle (9.2) \text{ Intercambio donde R es } Ig.x, \text{P es } (\forall y|Cu.y : Od(x,y)) \rangle \\
 & (\forall x| : Ig.x \Rightarrow (\forall y|Cu.y : Od(x,y))) \wedge Ig.\text{`}au\text{'} \wedge Cu.\text{`}ja\text{'} \\
\Rightarrow & \quad \left\langle \begin{array}{l} (9.13) \text{ Instanciación con } x := \text{`}au\text{'} \\ \text{Paridad 0 (par) } E : z \wedge Ig.\text{`}au\text{'} \wedge Cu.\text{`}ja\text{'} \end{array} \right\rangle \\
 & (Ig.x \Rightarrow (\forall y|Cu.y : Od(x,y)))[x := \text{`}au\text{'}] \wedge Ig.\text{`}au\text{'} \wedge Cu.\text{`}ja\text{'} \\
\equiv & \quad \langle \text{Sustitución Textual \ dado que } \neg ocurrelibre(y, x, \text{`}au\text{'}) \text{ porque no ocurre} \rangle \\
 & (Ig.x[x := \text{`}au\text{'}] \Rightarrow (\forall y|Cu.y[x := \text{`}au\text{'}] : Od(x,y)[x := \text{`}au\text{'}])) \wedge Ig.\text{`}au\text{'} \wedge Cu.\text{`}ja\text{'} \\
\equiv & \quad \langle \text{Sustitución Textual } \rangle \\
 & (Ig.\text{`}au\text{'} \Rightarrow (\forall y|Cu.y : Od(\text{`}au\text{'}, y))) \wedge Ig.\text{`}au\text{'} \wedge Cu.\text{`}ja\text{'} \\
\Rightarrow & \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{Sim.}\wedge \text{ ; Modus Ponens con } p, q := Ig.\text{`}au\text{'}, (\forall y|Cu.y : Od(\text{`}au\text{'}, y)) \\ \text{Paridad 0 (par) } E : z \wedge Cu.\text{`}ja\text{'} \end{array} \right\rangle \\
 & (\forall y|Cu.y : Od(\text{`}au\text{'}, y)) \wedge Cu.\text{`}ja\text{'} \\
\equiv & \quad \langle (9.2) \text{ Intercambio donde R es } Cu.y, \text{P es } Od(\text{`}au\text{'}, y) \rangle \\
 & (\forall y| : Cu.y \Rightarrow Od(\text{`}au\text{'}, y)) \wedge Cu.\text{`}ja\text{'} \\
\Rightarrow & \quad \left\langle \begin{array}{l} (9.13) \text{ Instanciación con } y := \text{`}ja\text{'} \\ \text{Paridad 0 (par) } E : z \wedge Cu.\text{`}ja\text{'} \end{array} \right\rangle \\
 & (Cu.y \Rightarrow Od(\text{`}au\text{'}, y))[y := \text{`}ja\text{'}] \wedge Cu.\text{`}ja\text{'} \\
\equiv & \quad \langle \text{Sustitución Textual } \rangle \\
 & (Cu.\text{`}ja\text{'} \Rightarrow Od(\text{`}au\text{'}, \text{`}ja\text{'})) \wedge Cu.\text{`}ja\text{'} \\
\Rightarrow & \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{Sim.}\wedge \text{ ; Modus Ponens con } p, q := Cu.\text{`}ja\text{'}, Od(\text{`}au\text{'}, \text{`}ja\text{'}) \\ \text{Paridad 0 (par) } E : z \end{array} \right\rangle \\
 & Od(\text{`}au\text{'}, \text{`}ja\text{'}) \\
\equiv & \quad \langle \text{Sustitución Textual } \rangle \\
 & Od(\text{`}au\text{'}, x)[x := \text{`}ja\text{'}] \\
\Rightarrow & \quad \langle (9.28) \text{ Introducción del Existencial , Paridad 0 (par) } E : z \rangle \\
 & (\exists x| : Od(\text{`}au\text{'}, x))
\end{array}
$$

Parte II
Combinando Métodos de Prueba aprendidos en el Cálculo Proposicional

En las siguientes demostraciones utilizaremos axiomas y teoremas del cálculo de predicados combinados con métodos de prueba aprendidos previamente en el cálculo proposicional.

3. Examen Septiembre-Diciembre 2008

Dada la siguiente formalización de un argumento, demuestre que es un teorema:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{H0:} & \neg(\exists x \mid R(x,\text{‘}b\text{’}) \vee Q.x : \neg P.x) \\
 & \text{H1:} & R(\text{‘}a\text{’},\text{‘}b\text{’}) \\
 & \text{H2:} & (\forall x \mid x = \text{‘}a\text{’} : S.x) \\
\hline
\therefore & \text{C:} & (\exists y \mid S.y : P.y)
\end{array}
$$

Aspectos claves de esta demostración:

- $H0$ es en realidad un para todo que podremos instanciar en un elemento en particular que sea de utilidad para completar la prueba.
- Reconocemos que $H2$ no es más que $S.\text{‘}a\text{’}$ por regla de un punto.
- $H1$ y $H2$ indican que $H0$ debe instanciarse en ‘a’.
- Teniendo $S.\text{‘}a\text{’}$ y $P.\text{‘}a\text{’}$ podremos introducir un cuantificador existencial y llegar a la conclusión requerida.

Supongo $H0 : \neg(\exists x \mid R(x,‘b’) \vee Q.x : \neg P.x) \equiv true$
$H1 : R(‘a’,‘b’) \equiv true$
$H2 : (\forall x \mid x = ‘a’ : S.x) \equiv true$

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x \mid R(x,‘b’) \vee Q.x : \neg P.x) \text{ — H0} \\
\equiv & \quad \langle \text{(9.18a) De Morgan Generalizado donde R es } R(x,‘b’) \vee Q.x, \text{P es } P.x \rangle \\
 & (\forall x \mid R(x,‘b’) \vee Q.x : P.x) \\
\equiv & \quad \langle \text{(9.2) Intercambio donde R es } R(x,‘b’) \vee Q.x, \text{P es } P.x \rangle \\
 & (\forall x \mid : R(x,‘b’) \vee Q.x \Rightarrow P.x) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{(9.13) Instanciación con } x := ‘a’, \text{ Paridad 0 (par) } E : z \rangle \\
 & (R(x,‘b’) \vee Q.x \Rightarrow P.x)[x := ‘a’] \\
\equiv & \quad \langle \text{Sustitución Textual} \rangle \\
 & R(‘a’,‘b’) \vee Q.‘a’ \Rightarrow P.‘a’ \\
\Rightarrow & \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{(3.76a) Deb/Fort. con } p, q := R(‘a’,‘b’), Q.‘a’, \\ \text{Paridad 1 (impar) } E : z \Rightarrow P.‘a’ \end{array} \right\rangle \\
 & R(‘a’,‘b’) \Rightarrow P.‘a’ \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro}\wedge, \text{Sim.}\wedge \rangle \\
 & true \wedge (R(‘a’,‘b’) \Rightarrow P.‘a’) \\
\equiv & \quad \langle H1 \equiv true \rangle \\
 & R(‘a’,‘b’) \wedge (R(‘a’,‘b’) \Rightarrow P.‘a’) \\
\Rightarrow & \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{Modus Ponens con } p, q := R(‘a’,‘b’), P.‘a’ \\ \text{Paridad 0 (par) } E : z \end{array} \right\rangle \\
 & P.‘a’ \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro}\wedge, \text{Sim.}\wedge \rangle \\
 & true \wedge P.‘a’ \\
\equiv & \quad \langle H2 \equiv true \rangle \\
 & (\forall x \mid x = ‘a’ : S.x) \wedge P.‘a’ \\
\equiv & \quad \langle \text{(8.14) Regla de Un Punto dado que } \neg ocurrelibre(x,‘a’) \text{ porque no ocurre} \rangle \\
 & (S.x)[x := ‘a’] \wedge P.‘a’ \\
\equiv & \quad \langle \text{Sustitución Textual} \rangle \\
 & S.‘a’ \wedge P.‘a’ \\
\equiv & \quad \langle \text{Sustitución Textual} \rangle \\
 & (S.y \wedge P.y)[y := ‘a’] \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{(9.28) Introducción del Existencial , Paridad 0 (par) } E : z \rangle \\
 & (\exists y \mid : S.y \wedge P.y) \\
\equiv & \quad \langle \text{(9.19) Intercambio donde R es } S.y, \text{P es } P.y \rangle \\
 & (\exists y \mid S.y : P.y)
\end{array}
$$

$\therefore H0 \wedge H1 \wedge H2 \Rightarrow (\exists y \mid S.y : P.y)$ — MDE

4. Examen Septiembre-Diciembre 2009

Dada la siguiente formalización de un argumento, demuestre que es un teorema usando el método de prueba suponer el antecedente:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{H0:} & \neg P(y,a) \wedge (\forall y \mid : S.y) \\
 & \text{H1:} & \neg(\exists x \mid : T.x) \\
\hline
\therefore & \text{C:} & (\forall x \mid S.b : (\exists y \mid R.y : Q.y)) \Rightarrow \neg(\forall x \mid : P(y,x)) \wedge (\exists y \mid : Q.y) \wedge (\exists x \mid : \neg T.x)
\end{array}
$$

Supongo $H0 : \neg P(y,a) \wedge (\forall y \mid : S.y) \equiv true$
$H1 : \neg(\exists x \mid : T.x) \equiv true$

Por el método abreviado debilitamiento

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x \,|S.b : \; (\exists y \mid R.y : Q.y)) \\
\equiv & \quad \langle (9.2) \text{ Intercambio donde R es } S.b, \text{ P es } (\exists y \mid R.y : Q.y) \rangle \\
 & (\forall x| : \; S.b \Rightarrow (\exists y|R.y : Q.y)) \\
\Rightarrow & \quad \langle (9.13) \text{ Instanciación con } x := \hat{b}, \text{ Paridad 0 (par) } E : z \rangle \\
 & (S.b \Rightarrow (\exists y|R.y : Q.y))[x := \hat{b}] \\
\equiv & \quad \langle \text{Sustitución Textual dado que } \neg ocurrelibre(y, x, \hat{b}) \text{ porque no ocurre} \rangle \\
 & S.b \Rightarrow (\exists y|R.y[x := \hat{b}] : Q.y[x := \hat{b}]) \\
\equiv & \quad \langle \text{Sustitución Textual} \rangle \\
 & S.b \Rightarrow (\exists y|R.y : Q.y) \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \text{; Sim.} \wedge \text{; } H0 \equiv true \rangle \\
 & \neg P(y,a) \wedge (\forall y \,|S.y) \wedge (S.\hat{b} \Rightarrow (\exists y|R.y : Q.y)) \\
\Rightarrow & \quad \left\langle \begin{array}{l} (9.13) \text{ Instanciación con } y := b \\ \text{Paridad 0 (par) } E : \neg P(y,a) \wedge z \wedge (S.b \Rightarrow (\exists y|R.y : Q.y)) \end{array} \right\rangle \\
 & \neg P(y,a) \wedge S.y[y := b] \wedge (S.b \Rightarrow (\exists y|R.y : Q.y)) \\
\equiv & \quad \langle \text{Sustitución Textual} \rangle \\
 & \neg P(y,a) \wedge S.b \wedge (S.b \Rightarrow (\exists y|R.y : Q.y)) \\
\Rightarrow & \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{Asoc.} \wedge \text{; Modus Ponens con } p, q := S.b, (\exists y|R.y : Q.y) \\ \text{Paridad 0 (par) } E : \neg P(y,a) \wedge z \end{array} \right\rangle \\
 & \neg P(y,a) \wedge (\exists y|R.y : Q.y) \\
\Rightarrow & \quad \left\langle \begin{array}{l} (9.25) \text{ Deb/Fort Rango } \exists \text{ donde R es } R.y, \text{Q es } true, \text{ P es } Q.y \\ \text{Paridad 0 (par) } E : \neg P(y,a) \wedge z \end{array} \right\rangle \\
 & \neg P(y,a) \wedge (\exists y|R.y \vee true : Q.y) \\
\equiv & \quad \langle (3.29) \text{ Absorbente} \vee \text{ con } p := R.y \rangle \\
 & \neg P(y,a) \wedge (\exists y| : Q.y) \\
\equiv & \quad \langle \text{Sustitución Textual} \rangle \\
 & \neg P(y,x)[x := a] \wedge (\exists y| : Q.y) \\
\Rightarrow & \quad \langle (9.28) \text{ Introducción del Existencial ; Paridad 0 (par) } E : z \wedge (\exists y| : Q.y) \rangle \\
 & (\exists x| : \neg P(y,x)) \wedge (\exists y| : Q.y) \\
\equiv & \quad \langle (9.18c) \text{ De Morgan Generalizado donde R es } true, \text{ P es } P(y,x) \rangle \\
 & \neg(\forall x| : P(y,x)) \wedge (\exists y| : Q.y) \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \text{; Sim.} \wedge \text{; } H1 \equiv true \rangle \\
 & \neg(\forall x| : P(y,x)) \wedge (\exists y| : Q.y) \wedge \neg(\exists x \mid : \; T.x) \\
\equiv & \quad \langle (9.18b) \text{ De Morgan Generalizado donde R es } true, \text{ P es } T.x \rangle \\
 & \neg(\forall x| : P(y,x)) \wedge (\exists y| : Q.y) \wedge (\forall x \mid : \; \neg T.x) \\
\Rightarrow & \quad \left\langle \begin{array}{l} (9.13) \text{ Instanciación con } x := \hat{x} \\ \text{Paridad 0 (par)} E : \neg(\forall x| : P(y,x)) \wedge (\exists y| : Q.y) \wedge z \end{array} \right\rangle \\
 & \neg(\forall x| : P(y,x)) \wedge (\exists y| : Q.y) \wedge (\neg T.x)[x := \hat{x}] \\
\Rightarrow & \quad \left\langle \begin{array}{l} (9.28) \text{ Introducción del Existencial} \\ \text{Paridad 0 (par)} E : \neg(\forall x| : P(y,x)) \wedge (\exists y| : Q.y) \wedge z \end{array} \right\rangle \\
 & \neg(\forall x| : P(y,x)) \wedge (\exists y| : Q.y) \wedge (\exists x| : \neg T.x)
\end{array}
$$

$\therefore H0 \wedge H1 \Rightarrow ((\forall x \,|S.b : \; (\exists y \mid R.y : Q.y)) \Rightarrow \neg(\forall x \mid : P(y,x)) \wedge (\exists y| : \; Q.y) \wedge (\exists x \mid : \neg T.x))$ — MDE

5. Examen Septiembre-Diciembre 2007

Dada la siguiente formalización de un argumento, demuestre que es un teorema **usando el método de prueba suponer el antecedente y probando el consecuente por contradicción**:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{H0:} & (\forall x \mid : P.x) \wedge (\forall x \mid : Q.x) \Rightarrow (\exists x \mid : R.x) \wedge (\exists t \mid : S.t) \wedge (\exists t \mid : T.t) \\
 & \text{H1:} & (\forall x \mid : \neg R.x) \vee (\exists t \mid : S.t) \Rightarrow (\forall t \mid : \neg T.t) \\
\hline
\therefore & \text{C:} & (\exists x \mid : \neg(P.x \wedge Q.x))
\end{array}
$$

Supongo $H0 : (\forall x \mid : \ P.x) \ \wedge \ (\forall x \mid : \ Q.x) \ \Rightarrow \ (\exists x \mid : \ R.x) \wedge (\exists t \mid : S.t) \wedge (\exists t \mid : \ T.t) \equiv true$
$H1 : (\forall x \mid : \neg R.x) \vee (\exists t \mid : S.t) \Rightarrow (\forall x \mid : \ \neg T.x) \equiv true$

Por Contradicción

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x \mid : \ \neg(P.x \wedge Q.x)) \\
\equiv & \quad \langle (9.18a) \text{ De Morgan Generalizado donde R es } true \text{ P es } P.x \wedge Q.x \rangle \\
 & (\forall x \mid : P.x \wedge Q.x) \\
\equiv & \quad \left\langle \begin{array}{l} (8.15) \text{ Distributividad donde R es } true \\ \text{dado que las cuantificaciones en } \forall \text{ siempre están definidas} \end{array} \right\rangle \\
 & (\forall x \mid : \ P.x) \ \wedge \ (\forall x \mid : \ Q.x) \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \text{, Sim.} \wedge \rangle \\
 & (\forall x \mid : \ P.x) \ \wedge \ (\forall x \mid : \ Q.x) \wedge true \\
\equiv & \quad \langle H1 \equiv true \rangle \\
 & (\forall x \mid : P.x) \wedge (\forall x \mid : Q.x) \wedge ((\forall x \mid : P.x) \wedge (\forall x \mid : Q.x) \ \Rightarrow \ (\exists x \mid : R.x) \wedge (\exists t \mid : S.t) \wedge (\exists t \mid : T.t)) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens Paridad 0 (par)} E : z \rangle \\
 & (\exists x \mid : \ R.x) \wedge (\exists t \mid : S.t) \wedge (\exists t \mid : \ T.t) \\
\Rightarrow & \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{Asoc.} \wedge \text{; Sim.} \wedge \text{; (3.76b) Deb/Fort. con } p, q := (\exists t \mid : S.t) \wedge (\exists t \mid : \ T.t), (\exists x \mid : \ R.x) \\ \ \text{Paridad 0 (par)} E : z \end{array} \right\rangle \\
 & (\exists t \mid : S.t) \wedge (\exists t \mid : \ T.t) \\
\Rightarrow & \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{(3.76a) Deb/Fort. con } p, q := (\exists t \mid : S.t), (\forall x \mid : \neg R.x) \\ \text{Paridad 0 (par) } E : z \wedge (\exists t \mid : \ T.t); \text{Sim.} \vee \end{array} \right\rangle \\
 & ((\forall x \mid : \neg R.x) \vee (\exists t \mid : S.t)) \wedge (\exists t \mid : \ T.t) \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \rangle \\
 & ((\forall x \mid : \neg R.x) \vee (\exists t \mid : S.t)) \wedge true \wedge (\exists t \mid : \ T.t) \\
\equiv & \quad \langle H1 \equiv true; \rangle \\
 & ((\forall x \mid : \neg R.x) \vee (\exists t \mid : S.t)) \wedge ((\forall x \mid : \neg R.x) \vee (\exists t \mid : S.t) \Rightarrow (\forall x \mid : \ \neg T.x)) \wedge (\exists t \mid : \ T.t) \\
\Rightarrow & \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{Modus Ponens con } p, q := (\forall x \mid : \neg R.x) \vee (\exists t \mid : S.t), (\forall x \mid : \ \neg T.x) \\ \text{Paridad 0 (par) } E : z \wedge (\exists t \mid : \ T.t) \end{array} \right\rangle \\
 & (\forall x \mid : \ \neg T.x) \wedge (\exists t \mid : \ T.t) \\
\equiv & \quad \langle \text{(9.17) De Morgan Generalizado donde R es } true, \text{ P es } T.t \rangle \\
 & (\forall x \mid : \ \neg T.x) \wedge \neg(\forall t \mid : \ \neg T.t) \\
\equiv & \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{8.21 Renombramiento de la variable de Cuantificación} \\ \text{dado que } \neg ocurrelibre(x, \text{`}true, \neg T.t\text{'}) \end{array} \right\rangle \\
 & (\forall x \mid : \ \neg T.x) \wedge \neg(\forall x \mid : \ \neg T.x) \\
\equiv & \quad \langle \text{Contradicción con } p := (\forall x \mid : \ \neg T.x) \rangle \\
 & false
\end{array}
$$

$\therefore (\exists x \mid : \ \neg(P.x \wedge Q.x))$

$\therefore H0 \wedge H1 \Rightarrow (\exists x \mid : \ \neg(P.x \wedge Q.x))$ — MDE

Parte III
Metateorema del Testigo

Recordemos que (9.30) Metateorema del Testigo establece que:

Dado que $\neg ocurrelibre(\hat{x}, `P, Q, R')$ entonces

$(\exists x \mid R : P) \Rightarrow Q$ es un teorema si y sólo si

$(R \wedge P)[x := \hat{x}] \Rightarrow Q$ es un teorema.

Se suele utilizar el metateorema del testigo para simplificar demostraciones que tienen un cuatificador Existencial en el antecedente del teorema a demostrar.

En lugar de demostrar la expresión original, se realiza una demostración donde un cuantificador existencial desaparece gracias al uso de un testigo.

Se puede aplicar el Metateorema del Testigo a varios cuantificadores existenciales, sin embargo, para cada aplicación del Metateorema se debe utilizar un testigo diferente.

6. Examen Enero-Marzo 2011

Demuestre utilizando los métodos de Prueba Metateorema del Testigo y Suposición del Antecedente. Puede realizar sustituciones textuales de forma implícita.

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{H0:} & (\forall x, y \mid Q.x \wedge P.y : R(x, y, `c\text{'})) \\
 & \text{H1:} & P.`a\text{'} \\
 & \text{H2:} & (\exists x \mid : \; Q.x) \\
\hline
\therefore & \text{C:} & (\exists x \mid : \; R(x, `a\text{'}, `c\text{'})) \vee P.`b\text{'}
\end{array}
$$

6.1. Siguiendo Estrictamente la Formulación del Metateorema del Testigo

Se debe demostrar que

$$H0 \wedge H1 \wedge H2 \Rightarrow C \tag{1}$$

pero el Metatateorema del Testigo (9.30), tal como está especificado, indica que sólo se tiene un cuantificador existencial en el antecedente.

Ya que tenemos un cuantificador existencial en el antecedente (H2), transformamos la expresión original, de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{ll}
 & H0 \wedge H1 \wedge H2 \Rightarrow C \\
\equiv & \quad \langle \text{Sim.} \wedge \text{ con } p, q := H0 \wedge H1, H2; \text{Shunting con } p, q, r := H2, H0 \wedge H1, C \rangle \\
 & H2 \Rightarrow (H0 \wedge H1 \Rightarrow C)
\end{array}
$$

Sustituyendo H2, tenemos que:

$$(\exists x \mid : \; Q.x) \Rightarrow (H0 \wedge H1 \Rightarrow C) \tag{2}$$

Dado que $\neg ocurrelibre(\hat{x}, `Q.x, H0 \wedge H1 \Rightarrow C, true\text{'})$ (porque no ocurre), la expresión (2) es un teorema si y solo si

$$(true \wedge Q.x)[x := \hat{x}] \Rightarrow (H0 \wedge H1 \Rightarrow C) \text{ es un teorema.}$$

Haciendo la sustitución textual y neutro de la conjunción, simplificamos la expresión a:

$$Q.\hat{x} \Rightarrow (H0 \wedge H1 \Rightarrow C) \tag{3}$$

Por (9.30) la expresión (1) es un teorema si y sólo si la expresión (3) es un teorema. Decidimos entonces realizar la demostración de la expresión (3) en lugar de la demostración de la expresión (1), pues la expresión (3) es más sencilla por la eliminación del cuantificador existencial gracias al uso del testigo $\hat{x}$.

Supongo $Q.\hat{x} \equiv true$

Supongo $H0 : (\forall x, y \,|\, Q.x \wedge P.y : R(x, y, \text{‘}c\text{’})) \equiv true$
$H1 : P.\text{‘}a\text{’} \equiv true$

$(\forall x, y \,|\, Q.x \wedge P.y : R(x, y, \text{‘}c\text{’}))$ — H0

$\equiv$ $\left\langle \begin{array}{l} \text{(8.20) Anidamiento donde R es } Q.x, \text{Q es } P.y, \text{P es } R(x, y, \text{‘}c\text{’}) \\ \text{dado que } \neg ocurrelibre(y, Q.x) \end{array} \right\rangle$

$(\forall x \,|\, Q.x : (\forall y \,|\, P.y : R(x, y, \text{‘}c\text{’})))$

$\equiv$ $\langle$(9.2) Intercambio donde R es $Q.x$, P es $(\forall y \,|\, P.y : R(x, y, \text{‘}c\text{’}))\rangle$

$(\forall x \,|\, : Q.x \Rightarrow (\forall y \,|\, P.y : R(x, y, \text{‘}c\text{’})))$

$\Rightarrow$ $\left\langle \begin{array}{l} \text{(9.13) Instanciación con } x := \hat{x} \text{ donde P es } Q.x \Rightarrow (\forall y \,|\, P.y : R(x, y, \text{‘}c\text{’})) \\ \text{Paridad 0 (par)}E : z; \text{Sust. Text. dado que } \neg ocurrelibre(y, \text{‘}x, \hat{x}\text{’}) \text{ pues no ocurre} \end{array} \right\rangle$

$Q.\hat{x} \Rightarrow (\forall y \,|\, P.y : R(\hat{x}, y, \text{‘}c\text{’}))$

$\equiv$ $\langle$Neutro$\wedge$; Sim.$\wedge$; $Q.\hat{x} \equiv true\rangle$

$Q.\hat{x} \wedge (Q.\hat{x} \Rightarrow (\forall y \,|\, P.y : R(\hat{x}, y, \text{‘}c\text{’})))$

$\Rightarrow$ $\langle$Modus Ponens con $p, q := Q.\hat{x}, (\forall y \,|\, P.y : R(\hat{x}, y, \text{‘}c\text{’}))$ Paridad 0 (par)$E : z\rangle$

$(\forall y \,|\, P.y : R(\hat{x}, y, \text{‘}c\text{’}))$

$\equiv$ $\langle$(9.2) Intercambio donde R es $P.y$, P es $R(\hat{x}, y, \text{‘}c\text{’})\rangle$

$(\forall y \,|\, : P.y \Rightarrow R(\hat{x}, y, \text{‘}c\text{’}))$

$\Rightarrow$ $\left\langle \begin{array}{l} \text{(9.13) Instanciación con } y := \text{‘}a\text{’} \text{ donde P es } P.y \Rightarrow R(\hat{x}, y, \text{‘}c\text{’}) \\ \text{Paridad 0 (par)}E : z; \text{Sustitución Textual} \end{array} \right\rangle$

$P.\text{‘}a\text{’} \Rightarrow R(\hat{x}, \text{‘}a\text{’}, \text{‘}c\text{’})$

$\equiv$ $\langle$Neutro$\wedge$; Sim.$\wedge$; $H1 \equiv true\rangle$

$P.\text{‘}a\text{’} \wedge (P.\text{‘}a\text{’} \Rightarrow R(\hat{x}, \text{‘}a\text{’}, \text{‘}c\text{’}))$

$\Rightarrow$ $\langle$Modus Ponens con $p, q := P.\text{‘}a\text{’}, R(\hat{x}, \text{‘}a\text{’}, \text{‘}c\text{’})$ Paridad 0 (par)$E : z\rangle$

$R(\hat{x}, \text{‘}a\text{’}, \text{‘}c\text{’})$

$\Rightarrow$ $\left\langle \begin{array}{l} \text{Sustitución Textual ; (9.28) Introducción del Existencial con } x := \hat{x} \\ \text{Paridad 0 (par)}E : z \end{array} \right\rangle$

$(\exists x \,|\, : R(x, \text{‘}a\text{’}, \text{‘}c\text{’}))$

$\Rightarrow$ $\left\langle \begin{array}{l} \text{(3.76a) Deb/Fort. con } p, q := (\exists x \,|\, : R(x, \text{‘}a\text{’}, \text{‘}c\text{’})), P.\text{‘}b\text{’} \\ \text{Paridad 0 (par)}E : z \end{array} \right\rangle$

$(\exists x \,|\, : R(x, \text{‘}a\text{’}, \text{‘}c\text{’})) \vee P.\text{‘}b\text{’}$

$\therefore H0 \wedge H1 \Rightarrow (\exists x \,|\, : R(x, \text{‘}a\text{’}, \text{‘}c\text{’})) \vee P.\text{‘}b\text{’}$ —MDE

$\therefore Q.\hat{x} \Rightarrow (H0 \wedge H1 \Rightarrow (\exists x \,|\, : R(x, \text{‘}a\text{’}, \text{‘}c\text{’})) \vee P.\text{‘}b\text{’})$ — MDE

Hemos demostrado que la expresión (3) es un teorema. Por lo tanto, por (9.30) Metateorema del Testigo, la expresión (1) es un teorema.

6.2. Metateorema del Testigo ampliado

En la sección anterior utilizamos Shunting para hacer que la expresión a demostrar cumpliera estrictamente lo establecido en el Metateorema del Testigo.

Sin embargo, por la manipulación de la expresión realizada en la sección anterior, es claro que el Metateorema del Testigo se cumple aunque haya más expresiones en conjunción en el antecedente.

Por esta razón, es posible aplicar el Metateorema del Testigo directamete a la expresión (1) , y dado que no ocurre libre el testigo $\hat{x}$ en toda la expresión, se puede proceder a demostrar

$$H0 \wedge H1 \wedge Q.\hat{x} \Rightarrow C \tag{4}$$

en lugar de demostrar expresión (1) o la expresión (3). Es evidente por Shunting, que la expresión 4 es equivalente a la expresión (3) demostrada en la sección anterior.

Supongo $H0 : (\forall x, y \,|\, Q.x \wedge P.y : R(x, y, \text{‘}c\text{’})) \equiv true$
$H1 : P.\text{‘}a\text{’} \equiv true$
$H2 : Q.\hat{x} \equiv true$

$(\forall x, y \,|\, Q.x \wedge P.y : R(x, y, \text{‘}c\text{’}))$ — H0

$\equiv \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{(8.20) Anidamiento donde R es } Q.x, \text{Q es } P.y, \text{P es } R(x, y, \text{‘}c\text{’}) \\ \text{dado que } \neg ocurrelibre(y, Q.x) \end{array} \right\rangle$

$(\forall x \,|\, Q.x : (\forall y \,|\, P.y : R(x, y, \text{‘}c\text{’})))$

$\equiv \quad \langle \text{(9.2) Intercambio donde R es } Q.x,\ \text{P es } (\forall y \,|\, P.y : R(x, y, \text{‘}c\text{’}))\rangle$

$(\forall x \,|\, :\ Q.x \Rightarrow (\forall y \,|\, P.y : R(x, y, \text{‘}c\text{’})))$

$\Rightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{(9.13) Instanciación con } x := \hat{x} \text{ donde P es } Q.x \Rightarrow (\forall y \,|\, P.y : R(x, y, \text{‘}c\text{’})) \\ \text{Paridad 0 (par)} E : z; \text{Sust. Text. dado que } \neg ocurrelibre(y, \text{‘}x, \hat{x}\text{’}) \text{ pues no ocurre} \end{array} \right\rangle$

$Q.\hat{x} \Rightarrow (\forall y \,|\, P.y : R(\hat{x}, y, \text{‘}c\text{’}))$

$\equiv \quad \langle \text{Neutro}\wedge\, ; \text{Sim.}\wedge\, ; Q.\hat{x} \equiv true\rangle$

$Q.\hat{x} \wedge (Q.\hat{x} \Rightarrow (\forall y \,|\, P.y : R(\hat{x}, y, \text{‘}c\text{’})))$

$\Rightarrow \quad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := Q.\hat{x}, (\forall y \,|\, P.y : R(\hat{x}, y, \text{‘}c\text{’})) \text{ Paridad 0 (par)} E : z\rangle$

$(\forall y \,|\, P.y : R(\hat{x}, y, \text{‘}c\text{’}))$

$\equiv \quad \langle \text{(9.2) Intercambio donde R es } P.y,\ \text{P es } R(\hat{x}, y, \text{‘}c\text{’})\rangle$

$(\forall y \,|\, :\ P.y \Rightarrow R(\hat{x}, y, \text{‘}c\text{’}))$

$\Rightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{(9.13) Instanciación con } x := \text{‘}a\text{’ donde P es } P.y \Rightarrow R(\hat{x}, y, \text{‘}c\text{’}) \\ \text{Paridad 0 (par)} E : z; \text{ Sustitución Textual} \end{array} \right\rangle$

$P.\text{‘}a\text{’} \Rightarrow R(\hat{x}, \text{‘}a\text{’}, \text{‘}c\text{’})$

$\equiv \quad \langle \text{Neutro}\wedge\, ;\ \text{Sim.}\wedge\, ;\ H1 \equiv true\rangle$

$P.\text{‘}a\text{’} \wedge (P.\text{‘}a\text{’} \Rightarrow R(\hat{x}, \text{‘}a\text{’}, \text{‘}c\text{’}))$

$\Rightarrow \quad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := P.\text{‘}a\text{’}, R(\hat{x}, \text{‘}a\text{’}, \text{‘}c\text{’}) \text{ Paridad 0 (par)} E : z\rangle$

$R(\hat{x}, \text{‘}a\text{’}, \text{‘}c\text{’})$

$\Rightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{Sustitución Textual ; (9.28) Introducción del Existencial con } x := \hat{x} \\ \text{Paridad 0 (par)} E : z \end{array} \right\rangle$

$(\exists x \,|\, :\ R(x, \text{‘}a\text{’}, \text{‘}c\text{’}))$

$\Rightarrow \quad \langle \text{(3.76a) Deb/Fort. con } p, q := (\exists x \,|\, :\ R(x, \text{‘}a\text{’}, \text{‘}c\text{’})), P.\text{‘}b\text{’ Paridad 0 (par)} E : z\rangle$

$(\exists x \,|\, :\ R(x, \text{‘}a\text{’}, \text{‘}c\text{’})) \vee P.\text{‘}b\text{’}$

$\therefore H0 \wedge H1 \wedge Q.\hat{x} \Rightarrow (\exists x \,|\, :\ R(x, \text{‘}a\text{’}, \text{‘}c\text{’})) \vee P.\text{‘}b\text{’}$ — MDE

7. Examen Enero-Marzo 2008

Compruebe que la siguiente expresión es un teorema, haciendo uso del Metateorema del Testigo

$$(\exists x \,|\, (\forall t \,|\, : S.t) : \neg P(y,x)) \Rightarrow ((\forall x \,| S.\hat{x} : (\exists t | R.t : P(y,x) \vee Q.t)) \Rightarrow \neg(\forall x \,| : P(y,x)) \wedge (\exists t | : Q.t)) \tag{5}$$

Como la expresión posee solamente un existencial en el antecedente, la aplicación del Metateorema del testigo es directa. Sin embargo, no se puede utilizar como testigo a $\hat{x}$ pues ocurre libre en la expresión (5). Eso no es problema, podemos utilizar cualquier otro testigo que no ocurra libre, como por ejemplo $\hat{y}$ o $\hat{z}$ o $\hat{a}$. En esta demostración utilizaremos $\hat{a}$ para evitar confundir variables.

Dado que

$$\begin{aligned}
&\neg ocurrelibre(\hat{a}, \text{`}\neg P(y,x),\\
&\qquad ((\forall x \,| S.\hat{x} : (\exists t | R.t : P(y,x) \vee Q.t)) \Rightarrow \neg(\forall x \,| : P(y,x)) \wedge (\exists t | : Q.t)),\\
&\qquad (\forall t \,| : S.t)\text{'})
\end{aligned}$$

Demostraremos que

$$\begin{aligned}
&((\forall t \,| : S.t) \wedge \neg P(y,x))[x := \hat{a}] \Rightarrow\\
&\qquad ((\forall x \,| S.\hat{x} : (\exists t | R.t : P(y,x) \vee Q.t)) \Rightarrow \neg(\forall x \,| : P(y,x)) \wedge (\exists t | : Q.t))
\end{aligned}$$

es un teorema. Es decir, demostraremos:

$$(\forall t \,| : S.t) \wedge \neg P(y,\hat{a}) \Rightarrow ((\forall x \,| S.\hat{x} : (\exists t | R.t : P(y,x) \vee Q.t)) \Rightarrow \neg(\forall x \,| : P(y,x)) \wedge (\exists t | : Q.t)) \tag{6}$$

Al demostrar que la expresión (6) es un teorema, por (9.30) Metateorema del Testigo podemos asegurar que la expresión (5) es un teorema.

Realizaremos la demostración utilizando los métodos de suposición del antecedente y abreviado de la implicación.

Supongo $H0 : (\forall t \mid :\ S.t) \equiv true$
$H1 : \neg P.(y, \hat{a}) \equiv true$

Por el método abreviado debilitamiento

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x|\, S.\hat{x} : (\exists t|R.t : P(y,x) \vee Q.t)) \\
\equiv & \qquad \langle (9.2) \text{ Intercambio donde R es } S.\hat{x},\ \text{P es } (\exists t|R.t : P(y,x) \vee Q.t) \rangle \\
 & (\forall x| :\ S.\hat{x} \Rightarrow (\exists t|R.t : P(y,x) \vee Q.t)) \\
\Rightarrow & \qquad \langle (9.13) \text{ Instanciación con } x := \hat{a} \text{ Paridad 0 (par)} E : z \rangle \\
 & (S.\hat{x} \Rightarrow (\exists t|R.t : P(y,x) \vee Q.t))[x := \hat{a}] \\
\equiv & \qquad \langle \text{Sustitución Textual dado que } \neg ocurrelibre(t, `x, \hat{a}\text{'}) \text{ porque no ocurre} \rangle \\
 & S.\hat{x} \Rightarrow (\exists t|R.t[t := \hat{a}] : (P(y,x) \vee Q.t)[x := \hat{a}]) \\
\equiv & \qquad \langle \text{Sustitución Textual} \rangle \\
 & S.\hat{x} \Rightarrow (\exists t|R.t : P(y,\hat{a}) \vee Q.t) \\
\equiv & \qquad \langle \text{Neutro}\wedge \text{ ; Sim.}\wedge \text{ ; } H0 \equiv true \rangle \\
 & (\forall t| : S.t) \wedge (S.\hat{x} \Rightarrow (\exists t|R.t : P(y,\hat{a}) \vee Q.t)) \\
\Rightarrow & \qquad \langle (9.13) \text{ Instanciación con } x := \hat{x} \text{ Paridad 0 (par)} E : z; \text{Sustitución Textual} \rangle \\
 & S.\hat{x} \wedge (S.\hat{x} \Rightarrow (\exists t|R.t : P(y,\hat{a}) \vee Q.t)) \\
\Rightarrow & \qquad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := S.\hat{x}, (\exists t|R.t : P(y,\hat{a}) \vee Q.t) \text{ Paridad 0 (par)} E : z \rangle \\
 & (\exists t|R.t : P(y,\hat{a}) \vee Q.t) \\
\equiv & \qquad \langle \text{Neutro}\wedge \text{ ; Sim.}\wedge \text{ ; } H1 \equiv true \rangle \\
 & \neg P(y,\hat{a}) \wedge (\exists t|R.t : P(y,\hat{a}) \vee Q.t) \\
\equiv & \qquad \left\langle \begin{array}{l} (9.21) \text{ Distr. } \wedge \text{ sobre } \exists \text{ dado que } \neg ocurrelibre(t, \neg P(y,\hat{a})) \text{ porque no ocurre} \\ \text{P es } \neg P(y,\hat{a}), \text{R es } R.t, \text{Q es } P(y,\hat{a}) \vee Q.t \end{array} \right\rangle \\
 & (\exists t|R.t : \neg P(y,\hat{a}) \wedge (P(y,\hat{a}) \vee Q.t)) \\
\equiv & \qquad \langle \text{Doble Neg. ; Absorción con } p, q := \neg P(y,\hat{a}), Q.t \rangle \\
 & (\exists t|R.t : \neg P(y,\hat{a}) \wedge Q.t)) \\
\equiv & \qquad \left\langle \begin{array}{l} (9.21) \text{ Distr. } \wedge \text{ sobre } \exists \text{ dado que } \neg ocurrelibre(t, \neg P(y,\hat{a})) \text{ porque no ocurre} \\ \text{P es } \neg P(y,\hat{a}), \text{R es } R.t, \text{Q es } Q.t \end{array} \right\rangle \\
 & \neg P(y,\hat{a}) \wedge (\exists t|R.t : Q.t) \\
\equiv & \qquad \langle \text{Sustitución Textual} \rangle \\
 & (\neg P(y,\hat{a}))[x := \hat{a}] \wedge (\exists t|R.t : Q.t) \\
\Rightarrow & \qquad \langle (9.28) \text{ Introducción del Existencial con } x := \hat{a}; \text{Paridad 0 (par) } E : z \wedge (\exists t|R.t : Q.t) \rangle \\
 & (\exists x \mid :\ \neg P(y,x)) \wedge (\exists t|R.t : Q.t) \\
\equiv & \qquad \langle (9.18c) \text{ De Morgan Generalizado donde R es } true,\ \text{P es } P(y,x) \rangle \\
 & \neg(\forall x \mid :\ P(y,x)) \wedge (\exists t|R.t : Q.t) \\
\Rightarrow & \qquad \left\langle \begin{array}{l} (9.25) \text{ Deb/Fort Rango } \exists \text{ donde R es } R.t,\ \text{Q es } true \text{ P es } Q.t \\ \ \text{Paridad 0 (par) } E : \neg(\forall x \mid :\ P(y,x)) \wedge z \end{array} \right\rangle \\
 & \neg(\forall x \mid :\ P(y,x)) \wedge (\exists t|R.t \vee true : Q.t) \\
\equiv & \qquad \langle (3.29) \text{ Absorbente} \vee \text{ con } p := R.t \rangle \\
 & \neg(\forall x \mid :\ P(y,x)) \wedge (\exists t| : Q.t)
\end{array}
$$

$\therefore H0 \wedge H1 \Rightarrow ((\forall x|\, S.\hat{x} : (\exists z|R.z : P(y,x) \vee Q.z)) \Rightarrow \neg(\forall x \mid :\ P(y,x)) \wedge (\exists t| : Q.t))$ — MDE

Parte IV
Método de Prueba Generalización

8. Propuesta Septiembre-Diciembre 2010

Considere el argumento que se presenta a continuación en el que, sobre un cierto tipo (dominio, universo), se utilizan los predicados unarios (símbolos relacionales unarios) P, Q y R, el predicado ternario (símbolo relacional ternario) S, y la constante 'a'.

Las premisas del argumento son:

H0 : $(\forall x|P.x : (\forall y|Q.y : (\forall w| : R.w \Rightarrow S(x, y, w))))$
H1 : $P.$'a'
H2 :$(\exists x| : Q.x)$

y la conclusión es

C :$(\forall x|R.x : (\exists y| : S(a, y, x)))$

Se quiere que Ud. demuestre que este argumento es correcto, esto es, que demuestre que $H0 \wedge H1 \wedge H2 \Rightarrow C$ es un teorema, utilizando: método de suposición de antecedente, Metateorema del Testigo sobre la última de las hipótesis, y Método de Generalización (Metateorema de $\forall$) para la obtención de la conclusión. Puede hacer las sustituciones textuales de forma implícita.

Supongo $H0 : (\forall x|P.x : (\forall y|Q.y : (\forall w| : R.w \Rightarrow S(x,y,w)))) \equiv true$

$H1 : P.\text{`}a\text{'} \equiv true$

$H2 : Q.\hat{b} \equiv true$

Sea x cualquiera tal que $R.x \equiv true$

$(\forall x|P.x : (\forall y|Q.y : (\forall w| : R.w \Rightarrow S(x,y,w)))) - H0$

$\equiv$ $\langle$(9.2) Intercambio donde R es $P.x$, P es $(\forall y|Q.y : (\forall w| : R.w \Rightarrow S(x,y,w)))\rangle$

$(\forall x| : P.x \Rightarrow (\forall y|Q.y : (\forall w| : R.w \Rightarrow S(x,y,w))))$

$\Rightarrow$ $\langle$ (9.13) Instanciación con $x :=$ ‘a’ Paridad 0 (par)$E : z$ Sustitución Textual dado que $\neg ocurrelibre(\text{`}y,w\text{'},\text{`}x,a\text{'})$ porque no ocurren $\rangle$

$P.\text{`}a\text{'} \Rightarrow (\forall y|Q.y : (\forall w| : R.w \Rightarrow S(\text{`}a\text{'},y,w)))$

$\equiv$ $\langle$Neutro$\wedge$; Sim.$\wedge$; $H1 \equiv true\rangle$

$P.\text{`}a\text{'} \wedge (P.\text{`}a\text{'} \Rightarrow (\forall y|Q.y : (\forall w| : R.w \Rightarrow S(\text{`}a\text{'},y,w))))$

$\Rightarrow$ $\langle$ Modus Ponens con $p,q := P.\text{`}a\text{'}, (\forall y|Q.y : (\forall w| : R.w \Rightarrow S(\text{`}a\text{'},y,w))$ Paridad 0 (par)$E : z$ $\rangle$

$(\forall y|Q.y : (\forall w| : R.w \Rightarrow S(\text{`}a\text{'},y,w)))$

$\equiv$ $\langle$(9.2) Intercambio donde R es $Q.y$, P es $(\forall w| : R.w \Rightarrow S(\text{`}a\text{'},y,w))\rangle$

$(\forall y| : Q.y \Rightarrow (\forall w| : R.w \Rightarrow S(\text{`}a\text{'},y,w)))$

$\Rightarrow$ $\langle$ (9.13) Instanciación con $y := \hat{b}$ Paridad 0 (par)$E : z$ Sustitución Textual dado que $\neg ocurrelibre(w,\text{`}y,\hat{b}\text{'})$ porque no ocurre $\rangle$

$Q.\hat{b} \Rightarrow (\forall w| : R.w \Rightarrow S(\text{`}a\text{'},\hat{b},w))$

$\equiv$ $\langle$Neutro$\wedge$; Sim.$\wedge$; $H2 \equiv true\rangle$

$Q.\hat{b} \wedge (Q.\hat{b} \Rightarrow (\forall w| : R.w \Rightarrow S(\text{`}a\text{'},\hat{b},w)))$

$\Rightarrow$ $\langle$ Modus Ponens con $p,q := Q.\hat{b}, (\forall w| : R.w \Rightarrow S(\text{`}a\text{'},\hat{b},w))$ Paridad 0 (par)$E : z$ $\rangle$

$(\forall w| : R.w \Rightarrow S(\text{`}a\text{'},\hat{b},w))$

$\Rightarrow$ $\langle$(9.13) Instanciación con $w := x$ Paridad 0 (par)$E : z$; Sustitución Textual $\rangle$

$R.x \Rightarrow s(\text{`}a\text{'},\hat{b},x)$

$\equiv$ $\langle$Neutro$\wedge$; Sim.$\wedge$; $R.x \equiv true\rangle$

$R.x \wedge (R.x \Rightarrow S(\text{`}a\text{'},\hat{b},x))$

$\Rightarrow$ $\langle$Modus Ponens con $p,q := R.x, S(\text{`}a\text{'},\hat{b},x)$ Paridad 0 (par)$E : z\rangle$

$S(\text{`}a\text{'},\hat{b},x)$

$\Rightarrow$ $\langle$ Sustitución Textual ; (9.28) Introducción del Existencial con $y := \hat{b}$ Paridad 0 (par)$E : z$ $\rangle$

$(\exists y| : S(\text{`}a\text{'},y,x))$

$\therefore (\forall x|R.x : (\exists y| : S(\text{`}a\text{'},y,x)))$ —Generalización

$\therefore H0 \wedge H1 \wedge H2 \Rightarrow (\forall x|R.x : (\exists y| : S(\text{`}a\text{'},y,x)))$ — MDE